



کد فرم : FR/FY/11

(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم)

ویرایش : صفر

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : ریاضی امتحان درس : ریاضی-۱ فنی (۷ گروه هماهنگ) نیمسال (اول/دوم) ۱۳۹۲-۹۳ نام مدرس :
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : ۱۳۹۳/۳/۱۷ وقت : ۱۳۵ دقیقه

توجه :

مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.
در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱- اگر $x \geq 0$ ، $f(x) = \frac{1}{\cosh x}$ ، نشان دهید : $0 < x \leq 1$ ، $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ ۱۵ نمره

سوال ۲- انتگرال معین $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

سوال ۳- انتگرال نامعین $\int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)}$ را حل کنید. ۲۰ نمره

سوال ۴- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و محور x ها را در بازه $[1, e^2]$ بیابید. ۲۰ نمره

سوال ۵- طول قوس منحنی $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ را محاسبه کنید. ۱۵ نمره

سوال ۶- همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره مقابل را بررسی کنید. $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x \, dx}{x^3 + 2}$ ۱۵ نمره

سوال ۷- الف) همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^3 n}$ را مشخص کنید. ۲۰ نمره

ب) بسط سری تیلور تابع $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ حول نقطه $a = 0$ را بنویسید.

(حداقل سه جمله غیر صفر)

موفق باشید



سوال ۱- می‌دانیم $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ بنابر این $f(x) = y = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}$ و چون $\cosh x \geq 1$ بنابر این $0 < y \leq 1$. برای

پیدا کردن تابع وارون جای x و y را عوض می‌کنیم و می‌نویسیم $x = \frac{2e^y}{e^{2y} + 1}$ و y را به عنوان یک مجهول محاسبه می‌کنیم.

$$x = \frac{2e^y}{e^{2y} + 1} \rightarrow xe^{2y} - 2e^y + x = 0 \quad \text{اکنون داریم } 0 < x \leq 1 \text{ و } 0 \leq y$$

$$\rightarrow e^y = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x} \xrightarrow{0 \leq y} e^y \geq 1 \rightarrow e^y = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \rightarrow y = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \rightarrow f^{-1}(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-4+4x-x^2}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \quad \text{سوال ۲- داریم:}$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos t dt}{2 |\cos t|} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{3} \quad \text{اکنون تغییر متغیر } x-2 = 2 \sin t \text{ را اعمال می‌کنیم.}$$

سوال ۳- برای حل این انتگرال از تغییر متغیر $t = \tan \frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم. داریم: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 \frac{2t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2-4t+3)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t-1)(t-3)}$$

$$\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{1/3}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{5/3}{t-3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t-1} + \frac{5}{t-3} \right) \quad \text{کسر داخل انتگرال را به کسرهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم.}$$

$$I = \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t-1} + \frac{5}{t-3} \right) dt = \frac{1}{3} (\ln |t| - 3 \ln |t-1| + 5 \ln |t-3|) + c = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t(t-3)^5}{(t-1)^3} \right| + c$$

سوال ۴- مساحت مورد نظر برابر است با $S = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ برای حل انتگرال به دو روش می‌توان عمل کرد.

روش اول (انتگرالگیری جزء به جزء): با فرض $dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $u = \ln x$, داریم $v = 2\sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{x}$ بنابر این

$$S = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4e - 4\sqrt{x} \Big|_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$$

روش دوم (تغییر متغیر): با فرض $x = t^2$ داریم $S = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^e 4 \ln t dt$ و با انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$S = \int_1^e 4 \ln t dt = 4[t \ln t - t]_1^e = 4$$

سوال ۵- مقدار طول قوس برابر است با $l = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2} dx$ چون $y' = \sqrt{\cos 2x}$ بنابر این:

$$l = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos 2x} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{2 \cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx = \sqrt{2} \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = 1$$

سوال ۶- چون $x \geq 1$ و $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ بنابر این $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x dx}{x^3 + 2}$ داریم :

$$0 \leq \int_1^\infty \frac{\cos^2 x dx}{x^3 + 2} \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2x^2} \Big|_1^\infty = \frac{1}{2}$$

پس انتگرال داده شده همگراست.

سوال ۷- الف) چون تابع $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$ در بازه $x \geq 2$ یک تابع نزولی است پس می توان از آزمون انتگرال استفاده کرد.

$$f(x) = \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{-1}{2 \ln^2 x} \Big|_2^\infty = \frac{1}{2 \ln^2 2}$$

اکنون همگرایی انتگرال ، همگرایی سری را نتیجه می دهد.

ب) دامنه تابع $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ عبارت است از $|x| < 1$. در این ناحیه داریم $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$

اکنون می توانیم مشتقات y را محاسبه کنیم. $y' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}, y'' = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}, y''' = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x+1)^3}, \dots$

می توان دید که اگر $n \geq 1$ داریم $y^{(n)} = (n-1)! \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^n} - \frac{(-1)^{n-1}}{(x+1)^n} \right)$ و در نتیجه برای هر n زوج داریم $y^{(n)}(0) = 0$ و برای هر

n فرد داریم $y^{(n)}(0) = -2(n-1)!$ اکنون می توانیم سری تیلور به مرکز $a=0$ را بنویسیم.

$$y = 0 - 2x + 0x^2 - \frac{2 \times 2!}{3!} x^3 + 0x^4 - \frac{2 \times 4!}{5!} x^5 + 0x^6 - \frac{2 \times 6!}{7!} x^7 + \dots$$

$$y = \ln \frac{1-x}{1+x} = -2 \left(x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{7} x^7 + \dots \right) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

و ناحیه همگرایی آن عبارت است از $|x| < 1$.